Zugänge zum Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie*.

Von

F. Hund in Jena

(Eingegangen am 24. September 1947)

Die Newtonsche Mechanik in bewegten Systemen enthält Züge, die das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie erleichtern können.

Unter den physikalischen Theorien finden sich „leichtere" und „schwierigere". Man empfindet diejenigen als leichter, die man schrittweise aufbauen kann, wobei jede erreichte Stufe für sich einleuchtet und für sich überzeugt. So gewinnt man leicht Zugang zur Theorie des elektromagnetischen Feldes, indem man zunächst das elektrostatische Feld, dann das Magnetfeld stationärer Ströme, schließlich das veränderliche elektromagnetische Feld untersucht. Schwierig hingegen ist sicher eine Theorie, die erst in ihrer vollständigen Gestalt einleuchtet, die nur als Ganzes erfaßt werden kann. Von dieser Art ist Einsteins allgemeine Relativitäts- und Gravitationstheorie. Vielleicht lohnt darum eine Untersuchung, ob zwischen den einleuchtenden physikalischen Grundgedanken dieser Theorie und den Gravitationsgleichungen (zu deren Verständnis eine Einsicht in die Invarianten bei allgemeinen Koordinatentransformationen gehört) noch ein Ruhepunkt möglich ist, von dem aus einiges Wesentliche der Theorie schon zu erkennen ist. Viel wird es nicht sein (wie das folgende zeigen wird), aber etwas. Es erscheint nicht etwa eine erste Näherung, die sich ohne Kenntnis der Einsteinschen Grundgleichungen überzeugend begründen läßt.

1. *Absoluter Raum.* Die Newtonsche Mechanik unterscheidet gleichförmige Translation von Beschleunigung und Drehung (das Foucaultsche Pendel „beweist" die Drehung der Erde, die Abplattung des Jupiters „beweist" seine Drehung, das geozentrische Weltsystem ist „physikalisch falsch"). Der so eingeführte „absolute Raum" tritt aber in der Newtonschen Mechanik nur als Ursache bestimmter Erscheinungen (z. B. von Coriolis- und Zentrifugalkräften) auf, über seine eigene Verursachung (er ist ja ein physikalisch Wirkliches) wird nichts ausgesagt. Diese zweite Verknüpfung des „absoluten Raumes" vermißt man in der Newtonschen Mechanik.

* Richard Becker zum 60. Geburtstag gewidmet.

In der Ausdrucksweise befriedigender als die Voraussetzung des absoluten Raumes ist etwa eine Fassung des Tragheitsgesetzes, wonach ein sich selbst uberlassener Korper seine Geschwindigkeit nach Große und Richtung beibehalt in einem Bezugssystem, das fest mit dem System der Fixsterne verbunden ist Daß (wie die NEWTONsche Mechanik voraussetzt) ein solches „Inertialsystem" weltweiter Ausdehnung existiert, ist dann vielleicht nur dadurch bedingt, daß die Relativbewegungen der Fixsterne erfahrungsgemaß geringfugig sind Diese vorlaufige Fassung der Grundlage der Mechanik die Fixsterne bestimmen ein gemeinsames starres Inertialsystem, ware dann zu erweitern zu einer endgultigen Fassung der physikalischen Grundgesetze, in der nur relative Orter und relative Bewegungen vorkommen (MACHsches Programm[1])

2 *Karussel* Wir wollen vorlaufig ganz im Rahmen der uns vertrauten NEWTONschen Mechanik bleiben, nur die Ausdrucksweise wollen wir dem MACHschen Programm anpassen Wir versetzen uns etwa auf ein Karussel, um dessen Achse das Fixsternsystem gleichformig mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlauft Als Insassen dieses Karussels erfahren wir Zentrifugalkrafte (vom Betrage $m\omega^2 r$), die von der Achse nach außen wirken, und Corioliskrafte (mit den Komponenten $-2m\omega r\dot{\varphi}$ und $2m\omega\dot{r}$ in der r- und φ-Richtung, r, φ sind Polarkoordinaten um die Karusselachse) Stellen wir diese Krafte durch ein Kraftfeld dar, indem wir jeweils den Kraftvektor in zwei Faktoren spalten, deren einer eine Eigenschaft des betroffenen Korpers, deren anderer eine Eigenschaft der Stelle angibt, so ist die Kraft

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{F} + m\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{G}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{F}$ von der Karusselachse wegzeigt und den Betrag $\omega^2 r$ hat und $\mathfrak{G}$ die Richtung dieser Achse oder die entgegengesetzte hat, die $\mathfrak{G}$-Komponente in der Achsenrichtung ist — $2c\omega$ Der Faktor c in (1) bedeutet eine Vergleichsgeschwindigkeit, wir haben ihn nur eingefuhrt, damit die beiden Feldgroßen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ dieselbe Dimension (eine Beschleunigung) bekommen Sind weitere masseproportionale Krafte vorhanden (wie die Gravitationswirkung der Erde, auf der vielleicht das Karussel steht), so rechnen wir sie zu $\mathfrak{F}$ *Das Kraftfeld im Karussel wird beschrieben durch einen polaren Vektor $\mathfrak{F}$ und einen axialen Vektor $\mathfrak{G}$*, der polare Vektor tritt auf, weil die Kraft von einer skalaren Eigenschaft des betroffenen Korpers abhangt, der axiale Vektor tritt auf, weil die Kraft in bestimmter Weise von einer vektoriellen Eigenschaft (der Geschwindigkeit) des betroffenen Korpers abhangt (Aus entsprechenden Grunden wird ja das elektromagnetische Feld durch einen polaren Vektor $\mathfrak{E}$ und einen axialen Vektor $\mathfrak{B}$ beschrieben)

[1] MACH, E Die Mechanik, Zweites Kapitel Ziffer 6, S 216 der 7 und 8 Auflage (1912/21)

Soweit $\mathfrak{F}$ eine wirkliche Gravitationsbeschleunigung ist, verursacht durch eine Massenverteilung der Dichte μ, gilt in der Newtonschen Gravitationstheorie

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = -4\pi\gamma\mu,$$

wo γ die Gravitationskonstante (6,7 $10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{sec}^{-2}$) ist Auch eine Zentrifugalbeschleunigung $\mathfrak{F}$ ist nicht quellenfrei, und zwar ist unter Berucksichtigung ihrer Richtung mit $|\mathfrak{F}| = \omega^2 r$

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = 2\,\omega^2$$

Die Zentrifugalbeschleunigung entspricht danach der Gravitationsabstoßung einer homogenen Massendichte

$$\mu = -\frac{\omega^2}{2\pi\gamma} \tag{2}$$

Der Betrag dieser Massendichte ist auf einem normalen Karussel ungeheuer groß Mit einer Umdrehungszeit von 10 sec, $\omega = 0{,}6\,\mathrm{sec}^{-1}$ erhalten wir $\mu = -10^6\,\mathrm{g/cm}^3$ *Die Zentrifugalwirkung in einem normalen Karussel entspricht der Gravitationswirkung einer negativen Massendichte, die den Raum des Karussels gleichformig erfullt Ihr Betrag* (abgesehen vom Vorzeichen) *ist so groß wie bei der Materie in einem dichten weißen Zwergstern* Man kann sich also das sinnliche Erlebnis der Gravitationswirkung (nicht der Tragheit) einer so hohen Massendichte durch Fahren auf einem Karussel verschaffen

Diese Massendichte (2) ist nicht bildlich gemeint, sie stellt eine physikalische Wirklichkeit dar Wenn wir gemaß der Einsteinschen Beziehung $E = mc^2$ zwischen Masse und Energie (c ist jetzt die Lichtgeschwindigkeit), die man entweder aus der speziellen Relativitatstheorie oder einfach aus der Erfahrung der Physik der Atomkerne entnehmen mag, zu einem Kraftfeld die Energiedichte ausrechnen, so erhalten wir bekanntlich beim elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ die Massendichte

$$\mu = \frac{\varepsilon_0\,\mathfrak{E}^2}{8\pi c^2} > 0$$

Das Vorzeichen hangt damit zusammen, daß sich gleichnamige elektrische Ladungen abstoßen Da sich normale gravitierende Massen aber anziehen, im ubrigen das Newtonsche Gravitationsgesetz formal dem Coulombschen Gesetz fur die Ladungen entspricht (fur ε_0 tritt $-1/\gamma$ ein), muß die Energiedichte eines Gravitationsfeldes $\mathfrak{g}$ gleich

$$u = -\frac{\mathfrak{g}^2}{8\pi\gamma} < 0$$

gesetzt werden Zu ihr gehort die (negative) Massendichte

$$\mu = -\frac{\mathfrak{g}^2}{8\pi\gamma c^2}$$

Auf dem Karussel haben wir nun neben dem Felde $\mathfrak{F}$, dessen Massendichte ganz klein ist, das „Coriolisfeld“ $\mathfrak{G}$ Nehmen wir seine Energiedichte als

$$u = -\frac{\mathfrak{g}^2}{8\pi\gamma} \tag{3}$$

an, so erhalten wir mit $|\mathfrak{G}| = 2c\,|\omega|$ genau die Massendichte (2) *Die Zentrifugalkraft ist gerade die Schwerewirkung der Massendichte des Coriolisfeldes*

Vom Standpunkte des MACHschen Programmes stellen sich die Krafte im Karussel folgendermaßen dar *Der Umlauf des Weltalls um das Karussel erzeugt ein axiales Kraftfeld* $\mathfrak{G}$ (Coriolisfeld) *Dieses hat eine negative Massendichte sehr hohen Betrages Die* (abstoßende) *Schwerewirkung dieser Massendichte ist die Zentrifugalkraft* $\mathfrak{F}$

Daß die Energiedichte (3) nur im rotierenden System auftritt, zeigt, daß die Lokalisierung der Feldenergie erheblich vom Bezugssystem abhangt

3 NEWTON*sche Mechanik* Was wir eben am Beispiel des gleichformig laufenden Karussels erkannten, wollen wir in etwas allgemeinerer Form der NEWTONschen Mechanik entnehmen In einem beliebigen starren Bezugssystem tritt bekanntlich die Kraft auf

$$m\mathfrak{r} = m[\mathfrak{g} + \mathfrak{b} + \mathfrak{o} \times \mathfrak{r} - \mathfrak{o} \times (\mathfrak{o} \times \mathfrak{r}) - \mathfrak{r} \times 2\mathfrak{o}], \tag{4}$$

darin ist $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor, $\mathfrak{g}$ die Gravitationswirkung irgendwelcher Massen im gewohnlichen Sinne, $\mathfrak{b}$ die Beschleunigung und $\mathfrak{o}$ die Winkelgeschwindigkeit (nach Große und Richtung) des Fixsternhimmels gegen das Bezugssystem Der gleiche Faktor m vor $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{g}$ druckt das GALILEIsche, durch die Messungen von EOTVOS erhartete Prinzip aus, daß alle Korper gleichschnell fallen, daß trage und schwere Massen einander genau entsprechen Der Faktor m vor den anderen Gliedern besagt, daß sie auf Grund ihrer Wirkung nicht von Gravitationskraften unterschieden werden konnen (EINSTEINsches Aquivalenzprinzip) *Die Erfullung des* MACH*schen Programmes fuhrt zu einer neuen Gravitationstheorie*

Die Gleichung (4) ziehen wir zusammen zu

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{F} + m\,\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{G} \tag{1}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{g} + \mathfrak{b} + \mathfrak{o} \times \mathfrak{r} - \mathfrak{o} \times (\mathfrak{o} \times \mathfrak{r}) \\ \mathfrak{G} &= -2c\mathfrak{o} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$\mathfrak{G}$ ist raumlich konstant $\mathfrak{F}$ hat Quellen und Wirbel $\mathfrak{b}$ ist raumlich konstant, $\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}$ (kreisformig um die Achse laufende Feldlinien) quellenfrei mit

$$\mathfrak{rot}\,(\mathfrak{v} \times \mathfrak{r}) = 2\,\mathfrak{v}\,,$$

die Zentrifugalbeschleunigung $-\,\mathfrak{v} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})$ (radial von der Achse weglaufende Feldlinien) ist wirbelfrei mit

$$\mathrm{div}\,[-\,\mathfrak{v} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})] = 2\,\mathfrak{v}^2$$

Drucken wir noch $\mathfrak{g}$ durch seine Quellen, die gravitierenden Massen im gewohnlichen Sinne, aus (Dichte μ), so haben wir die „Feldgleichungen"

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mathfrak{G} &= 0 \\ \frac{1}{c}\,\dot{\mathfrak{G}} + \mathfrak{rot}\,\mathfrak{F} &= 0 \\ \mathfrak{rot}\,\mathfrak{G} &= 0 \\ \mathrm{div}\,\mathfrak{F} - \frac{1}{2c^2}\,\mathfrak{G}^2 &= -\,4\pi\gamma\mu \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Im Sinne des MACHschen Programmes bei Gultigkeit der NEWTONschen Mechanik und Gravitationstheorie wird das *„Gravitationsfeld" beschrieben durch einen polaren Vektor $\mathfrak{F}$ und einen axialen Vektor $\mathfrak{G}$ Fur diese gelten die Feldgleichungen* (6) Die beiden ersten Gleichungen besagen, daß die Feldvektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sich aus Potentialen (V, $\mathfrak{A}$) ableiten lassen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G} &= c^2\,\mathfrak{rot}\,\mathfrak{A} \\ \mathfrak{F} &= -\,c\,\dot{\mathfrak{A}} - c^2\,\mathfrak{grad}\,V \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(Die gegenuber der Elektrodynamik etwas veranderten unwesentlichen Konstanten machen V und $\mathfrak{A}$ dimensionslos) *Die Nichtlinearitat der Feldgleichungen* (6) *ist ein Merkmal, das schon auf der Stufe der* NEWTON*schen Theorie auftritt* Das Glied $-\,\mathfrak{G}^2/2\,c^2$ in der letzten der Feldgleichungen (6) kann als Schwerewirkung der Energie des $\mathfrak{G}$-Feldes gedeutet werden

Fur das Karussel laßt sich das Coriolisfeld $\mathfrak{G} = -\,2\,c\,\mathfrak{v}$ aus einem Vektorpotential

$$\mathfrak{A} = -\,\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{r}, \qquad (8)$$

das Zentrifugalfeld $-\,\mathfrak{v} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})$ aus einem skalaren Potential

$$V = -\,\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c} \times \mathfrak{r}\right)^2 \qquad (9)$$

ableiten (es ist $-\,c^2\,d\,V = (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})\ (\mathfrak{v} \times d\,\mathfrak{r}) = [-\,\mathfrak{v} \times (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})]\ d\,\mathfrak{r}$) Das Glied $-\,c\,\dot{\mathfrak{A}}$ liefert die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}} \times \mathfrak{r}$

4 *Metrik im Rahmen der* NEWTON*schen Theorie* Beim Eindringen in die allgemeine Relativitatstheorie wird man nicht nur die NEWTONsche Mechanik und Gravitationstheorie voraussetzen, sondern auch die Ergebnisse der speziellen Relativitatstheorie – die LORENTZ-Invarianz des Naturgeschehens – benutzen Dazu gehoren Maßstabsverkurzungen und Anderungen des Uhrganges, die in bewegten Systemen auftreten Sie gehen mit dem Quadrat der Bewegungsgeschwindigkeit, sind also klein, solange man noch erheblich unter der Lichtgeschwindigkeit bleibt

„Vorrelativistisch" jedoch ist die Erscheinung, daß die Lichtgeschwindigkeit in einem beschleunigten oder gedrehten Bezugssystem von der Richtung abhangt, insbesondere in zwei entgegengesetzten Richtungen verschieden sein kann Rechnen wir diese Erscheinung, die etwas uber den Zusammenhang von Ortsmessung und Zeitmessung aussagt, zur „Metrik", so haben wir *auf einem Karussel eine veranderte Metrik* Wir wollen vorlaufig der speziellen Relativitatstheorie nur die Vorsicht beim Gebrauch des Wortes „gleichzeitig" entnehmen, nicht ihren sachlichen Inhalt, *wir bleiben noch auf dem Boden der* NEWTON*schen Physik*

Metrik und Gravitationsfeld (soweit es Tragheitswirkung ist) haben die gleiche Wurzel, namlich die Transformation vom Inertialsystem zum bewegten Bezugssystem *Wir erwarten einen einfachen Zusammenhang zwischen den Großen, die die Metrik bestimmen, und den Feldgroßen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{G}$ *der Gravitation* Zunachst moge eine Uberlegung uber das Karussel zeigen, daß die Metrik durch die Potentiale V und $\mathfrak{A}$ des Gravitationsfeldes beschrieben wird

Sehen wir ein Karussel von außen – von einem Inertialsystem aus – an, so benutzen wir in unmißverstandlicher Weise Zeit- und Ortskoordinaten $\bar{t}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ Fur den inneren Gebrauch auf dem Karussel konnen wir Zeit- und Ortskoordinaten t, $\mathfrak{r}$ in folgender Weise einfuhren die Uhren mogen durch radiale Lichtsignale mit einer in der Karusselachse aufgestellten Normaluhr verglichen werden, die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden entgegengesetzten radialen Lichtwegen werden also als gleich angenommen, und es ist $\bar{t} = t$ Die Ortskoordinaten werden mit starren Maßstaben bestimmt (soweit $\omega^2 r^2$ nicht gegen c^2 vernachlassigt werden kann, haben die Ergebnisse keine uber die NEWTONsche Mechanik hinausgehende Gultigkeit)

Der Ubergang von $\bar{t}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ zu t, $\mathfrak{r}$ wird vermittelt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \bar{t} &= t \\ d\bar{\mathfrak{r}} &= d\mathfrak{r} - \mathfrak{o} \times \mathfrak{r}\, dt \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

($\mathfrak{o}$ bezeichnet wie fruher die Drehung des Fixsternhimmels um das Karussel) Der in der Beziehung

$$c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{\mathfrak{r}}^2 = 0$$

für die Lichtbewegung auf der linken Seite stehende Ausdruck wird in den neuen Koordinaten

$$c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{\mathfrak{r}}^2 = [c^2 - (\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})^2]\, dt^2 + 2\,(\mathfrak{v} \times \mathfrak{r})\, dt\, d\mathfrak{r} - d\mathfrak{r}^2$$

Wir schreiben dafür

$$(1 + 2\,V)\, c^2 dt^2 - 2\,\mathfrak{A} c\, dt\, d\mathfrak{r} - d\mathfrak{r}^2 \tag{11}$$

mit der Bedeutung (8) und (9) von $\mathfrak{A}$ und V. $\mathfrak{A}$ gibt die Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit an. Liegt zwischen $\mathfrak{A}$ und der Lichtrichtung der Winkel ϑ, so errechnet sich aus (11) die Lichtgeschwindigkeit zu ($A = |\mathfrak{A}|$)

$$C = c\left[-A\cos\vartheta + \sqrt{A^2\cos^2\vartheta + 1 + 2\,V}\right],$$

für $\vartheta = \pi/2$ wird

$$C = c\sqrt{1 + 2\,V}$$

für $\vartheta = 0$ und π wird

$$C = c\left(\sqrt{1 + 2\,V + A^2} \mp A\right) \approx c\,(1 \mp A).$$

Die Metrik auf dem Karussel wird durch einen Skalar V und einen polaren Vektor $\mathfrak{A}$ beschrieben. Diese Beschreibung der Metrik gibt die Potentiale des Gravitationsfeldes, soweit es Trägheitswirkung ist.

Das Passen von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ zu V und $\mathfrak{A}$ läßt sich (innerhalb der Newtonschen Mechanik) noch etwas allgemeiner vorrechnen, als es hier für das Karussel geschehen ist. Wir können z. B. auch mittels

$$t = \tau + f(\tau, \mathfrak{r})$$

eine andere Zeitkoordinate τ einführen. Die Lichtgeschwindigkeit wird dann in anderer Weise ort- und richtungsabhängig, es tritt eine andere Metrik auf. Mit

$$dt = d\tau + \dot{f}\, d\tau + \mathfrak{grad}\, f\, d\mathfrak{r}$$

wird unter Beschränkung auf in f lineare Glieder

$$c^2 d\bar{t}^2 - d\bar{\mathfrak{r}}^2 = c^2(1 + 2\,V)\, d\tau^2 - 2\,\mathfrak{A} c\, d\tau\, d\mathfrak{r} - d\mathfrak{r}^2,$$

wobei

$$V = V_1 + \dot{f} \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 - c\,\mathfrak{grad}\, f$$

ist und V_1 und $\mathfrak{A}_1$ die bisherige Metrik bezeichnen. Bei der Bildung von $c^2\,\mathfrak{rot}\,\mathfrak{A}$ und $-c\dot{\mathfrak{A}} - c^2\,\mathfrak{grad}\,V$ geben die Zusätze keinen Beitrag.

5. *Erweiterung über* NEWTON *hinaus.* Bis hierher trieben wir NEWTONsche Mechanik. Im Sinne des MACHschen Programms ist sie in den Feldgleichungen (6) zusammengefaßt. Diese Gleichungen rufen in zweifacher Hinsicht nach einer Ergänzung. Einmal muß die Erzeugung des axialen Feldes $\mathfrak{G}$ durch den Umlauf ferner Massen gefaßt werden, zum anderen gibt auch $\mathfrak{F}$ einen Beitrag zur Energiedichte, und es muß die Schwerewirkung dieser Energie ausgedrückt werden. Da das Feld durch umlaufende Massen in ähnlicher Weise erzeugt wird wie ein magnetisches Feld durch umlaufende Ladungen, liegt die Annahme nahe, daß die Wirbel von $\mathfrak{G}$ durch die Bewegung von Materie bestimmt sind, während die Quellen von $\mathfrak{G}$ (als Quellen eines axialen Vektors sind sie pseudoskalar) null sind. Die folgende über NEWTON hinausgehende Erweiterung der Gleichungen (6) ist naheliegend, aber, wie wir sehen werden, nicht richtig:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathfrak{G} &= 0 \\ \frac{1}{c}\,\mathfrak{G} + \operatorname{rot}\mathfrak{F} &= 0 \\ -\frac{1}{c}\,\mathfrak{F} + \operatorname{rot}\mathfrak{G} - \frac{1}{c^2}\,\mathfrak{F}\times\mathfrak{G} &= -4\pi\,\frac{\gamma}{c}\,\mu\,\mathfrak{v} \\ \operatorname{div}\mathfrak{F} - \frac{1}{2c^2}\left(\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2\right) &= -4\pi\gamma\mu \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Bis auf die nichtlinearen Glieder entsprechen die Gleichungen denen des elektromagnetischen Feldes im Vakuum. Wie dort folgt ohne die nichtlinearen Glieder ein Satz der Erhaltung der Materie

$$\mu + \operatorname{div}(\mu\,\mathfrak{v}) = 0$$

und der Zusammenhang von Energie- und Leistungsdichte

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{G}^2}{8\pi\gamma}\right) + \operatorname{div}\left(-\frac{-c}{4\pi\gamma}\,\mathfrak{F}\times\mathfrak{G}\right) + \mu\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{F} = 0$$

Das von der Elektrodynamik verschiedene Vorzeichen vor μ in (12) führt zu dem Minuszeichen in der Energiedichte und in der Dichte des Energiestromes. Die letzte Gleichung folgt auch bei Mitnahme der nichtlinearen Glieder in (12). Der Satz der Erhaltung der Materie wird jedoch durch einen anderen ersetzt. Im ganzen folgt aus (12)

$$c^2(\mu + \operatorname{div}\mu\,\mathfrak{v}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\mathfrak{F}^2+\mathfrak{G}^2}{8\pi\gamma}\right) - \operatorname{div}\left(-\frac{c}{4\pi\gamma}\,\mathfrak{F}\times\mathfrak{G}\right) = \mu\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{F}$$

Die Gleichungen drücken aus die Äquivalenz von Masse und Energie und die Umwandlung der einen in die andere mittels einer Arbeit.

Wenn auch die hier gegebene Erweiterung über die NEWTONsche Theorie hinaus (wie wir sehen werden) nicht richtig ist, so müssen doch ihre Grundzüge – Verursachung von $\mathfrak{G}$ durch bewegte Massen und Schwere von $\mathfrak{F}^2$ – qualitativ der Wirklichkeit entsprechen. Begnügen wir uns mit qualitativen Folgerungen, so können wir die Gleichungen (12), die gegenüber den EINSTEINschen Gravitationsgleichungen sehr einfach sind, als *Modelltheorie* benutzen.

6. *Mitführung des Inertialfeldes durch ferne Massen.* Erfahrungsgemäß legt das Fixsternsystem das Inertialfeld fest. Die Frage ist berechtigt, ob nicht schon ein kleineres System von Massen, etwa ein von außen als rotierend erkannter Spiralnebel, das Inertialfeld gegenüber der Umgebung etwas mitführt. Wir untersuchen die Frage vom Standpunkt unserer Modelltheorie (12).

Ein Hohlzylinder möge gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse rotieren. Die Rotation erzeugt im Zylinderinnern ein $\mathfrak{G}$-Feld, dessen Energiedichte dann zu einem $\mathfrak{F}$-Felde führt. Bei schwächerem Felde können wir die nichtlinearen Glieder weglassen und

$$\mathfrak{rot}\,\mathfrak{G} = -4\pi\,\frac{\gamma}{c}\,\mu\,\mathfrak{v}$$

schreiben. Auf einem Integrationswege, der auf einer Meridianebene durch das Zylinderinnere hin und außen zurückführt, wird

$$\oint \mathfrak{G}\,d\mathfrak{r} = -4\pi\,\frac{\gamma}{c}\int\!\!\int \mu\,\mathfrak{v}\,df,$$

wobei rechts über einen Meridianschnitt integriert wird. Es folgt

$$G L = -\frac{2\gamma}{c}\,\omega\,M,$$

wo M die Zylindermasse und L die Länge ist. Bei Annahme eines homogenen Hohlzylinders erhalten wir

$$G = -2\pi\,\frac{\gamma}{c}\,\omega\,\mu\,(R_a^2 - R_i^2),$$

wo R_a den äußeren, R_i den inneren Zylinderradius bedeutet. Setzen wir $\mathfrak{G} = -2\,c\,\omega_1$, so gibt

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\gamma}{c^2}\,\frac{M}{L} = \frac{\gamma}{c^2}\,\mu\,\pi\,(R_a^2 - R_i^2) \tag{13}$$

den *Grad der Mitführung des Inertialfeldes proportional der rotierenden Masse je Längeneinheit an*. Für einen Spiralnebel der Masse 10^{44} g und der Achsenausdehnung 10^{21} cm, oder der Massedichte 10^{-23} g/cm³ und des Radius 10^{23} cm erhält man $\omega_1/\omega \approx 10^{-5}$. *Man braucht das ganze Weltall* ($\mu \approx 10^{-29}$ g/cm³, $R \approx 10^{10}$ Lichtjahre $= 10^{28}$ cm), *um mit der Mitführung in die Nähe von 1 zu kommen*. Natürlich ist dann unsere Näherung nicht mehr gut und (13) hat nur Sinn als größenordnungsmäßige Abschätzung.

7. *Selbstabschirmung der schweren Massen*. Eine gegebene Masse erzeugt in ihrer Umgebung ein Gravitationsfeld $\mathfrak{F}$. Von der Energie dieses Feldes müssen wir annehmen, daß sie wie eine negative Masse wirkt, also die gravitierende Wirkung der gegebenen Masse herabsetzt. Zwei Folgen dieses Sachverhaltes seien etwas näher betrachtet.

Die Schwerkraft einer punktförmigen Masse ist nicht mehr durch $F = -\gamma\, m/r^2$ gegeben, die Kraft nimmt gegen das Zentrum hin stärker zu. Die Bahn eines Massenpunktes in diesem Kraftfeld ist nicht mehr genau eine Ellipse, die Abweichung ist eine *vorschreitende Drehung des Perizentrums*. Unsere Modelltheorie liefert

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} - \frac{1}{2c^2}\,\mathfrak{F}^2 = 0$$

$$(r^2 F)' - \frac{1}{2c^2 r^2}\,(r^2 F)^2 = 0 \tag{14}$$

$$F = -\frac{2c^2 a}{r\,(r-a)} = -\frac{\gamma m}{r\left(r - \frac{\gamma m}{2c^2}\right)}$$

Die Schwerkraft einer Masse mit gleichförmiger fester Dichte wächst bei Vergrößerung ihrer Ausdehnung nicht unbegrenzt. Die Modelltheorie ergibt innerhalb einer Kugel konstanter Massendichte (etwa mittels der Hilfsvariabeln y gemäß $F = y'/2c^2 y$) die im Punkte $r = 0$ reguläre Lösung

$$F = 2c^2\left(\frac{1}{r} - \frac{\sqrt{2\pi\gamma\mu}}{c}\,\mathfrak{Kot}\,\frac{\sqrt{2\pi\gamma\mu}}{c}\,r\right),$$

die für kleine r durch

$$F = -\frac{4\pi}{3}\,\gamma\mu\, r$$

(wie in der NEWTONschen Theorie) angenähert wird und für große r sich der Konstanten

$$F = -2c\sqrt{2\pi\gamma\mu}$$

nahert Die Selbstabschirmung wird merklich, sobald r die Großenordnung $c/\sqrt{2\pi\gamma\mu}$ uberschreitet, also bei Ausmaßen, wie sie gemaß (13) auch zur Mitfuhrung des Inertialfeldes fuhren *Man braucht das ganze Weltall zur Selbstabschirmung der gravitierenden Massen*

Die beiden hier gegebenen Rechnungen haben nur Modellcharakter, da die Gleichungen (12) nicht richtig sind Bei einem Vergleich mit den strengen Losungen der EINSTEINschen Gleichungen ist darauf zu achten, was dort unter r verstanden ist

8 *Lorentzinvarianz* Wir wollen uns jetzt uberzeugen, daß die Gleichungen unserer Modelltheorie nicht streng richtig sein konnen Die Gleichungen sind nicht lorentzinvariant Zwar bilden die in den Feldgroßen linearen Glieder der linken Seiten zusammen mit den rechten Seiten ein lorentzinvariantes System, wobei $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ ein schiefsymmetrischer Tensor, $(\mu, \mu\mathfrak{v}/c)$ ein Vierervektor ist Dazwischen stehen aber die Bestandteile $(\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2)/2c^2$ und $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}/c^2$ des symmetrischen Energie-Impulstensors Nach der speziellen Relativitatstheorie – die wir jetzt ausdrucklich herbeiziehen – sind aber auch Massendichte und Impulsdichte Bestandteile eines symmetrischen Materietensors (wir wollen ihn μ_{ik} nennen), der zusammen mit dem Energie-Impulstensor des Feldes einem Erhaltungssatz genugt Der Vergleich der Gravitationstheorie mit der Elektrodynamik sieht also folgendermaßen aus Das elektromagnetische Feld hangt an dem Vierervektor von Ladungs- und Stromdichte $(\rho\ \mathfrak{i}/c)$ und ubt Krafte auf den Trager solcher Dichte aus Aus beiden Grunden wird es durch einen Tensor zweiter Stufe beschrieben, und es genugt ein schiefsymmetrischer Tensor $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ *Das Gravitationsfeld hangt an dem symmetrischen Tensor der Materiedichte* (μ_{ik}) *und ubt Krafte auf den Trager solcher Dichte aus Es muß beschrieben werden durch einen Tensor dritter Stufe* (Γ_{ikl}) *und es genugt vielleicht einer, der in zweien der Indizes symmetrisch ist Das gabe 40 Komponenten des Gravitationsfeldes* Wahrend die elektromagnetischen Feldgroßen sich auf einen Vierervektor der Potentiale $(V, \mathfrak{A})$ zuruckfuhren lassen, konnen wir beim Gravitationsfeld die *Zuruckfuhrung auf einen symmetrischen Tensor der Potentiale* (A_{ik}) erwarten Wahrend die allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes linear in den Feldgroßen sind, mussen die Gravitationsgleichungen wegen der Schwerewirkung der Energie des Feldes *nichtlineare Glieder* enthalten

Die spezielle Relativitatstheorie lehrt ferner Langenanderungen bewegter Maßstabe und Ganganderungen bewegter Uhren Schon wenn man bei der Beschreibung der Vorgange in einem Karussel uber die NEWTONsche Naherung hinausgehen will, muß man berucksichtigen, daß der mit starren

Körpern gemessene Umfang des Karussels größer ist als das 2π-fache des mit den gleichen Maßstäben gemessenen Radius. Eine solche veränderte Metrik kann – zunächst unter Beschränkung auf den räumlichen Teil – erfaßt werden, indem man das Quadrat der mit starren Körpern gemessenen infinitesimalen Länge ds durch irgendwelche drei Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3 in der Form

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{15}$$

ausdrückt. Unter Hinzunahme der Zeit ist der in der speziellen Relativitätstheorie maßgebende Ausdruck

$$c^2\, dt^2 - d\mathfrak{r}^2 = dx^0\, dx^0 - dx^1\, dx^1 - dx^2\, dx^2 - dx^3\, dx^3$$

durch den allgemeinen Ausdruck (15) zu ersetzen, wo i, k jetzt von 0 bis 3 gehen. Die Metrik wird also durch den symmetrischen Tensor g_{ik} beschrieben.

Schon beim Karussel in der NEWTONschen Mechanik sahen wir den engen Zusammenhang von Gravitationsfeld und Metrik, die Metrik gab die Potentiale des Gravitationsfeldes an. Jetzt können wir uns nicht mehr auf rechtwinklige Koordinatensysteme beschränken, wir müssen Grundgleichungen suchen, die für beliebige krummlinige Koordinaten gelten. Diese *Grundgleichungen müssen die Feldgrößen* g_{ik} *der Metrik und die Feldgrößen oder Potentiale der Gravitation* A_{ik} *mit dem Materietensor* μ_{ik} *verknüpfen.*

9. EINSTEINs *Theorie.* EINSTEINs Grundgedanke für die Aufstellung dieser Gleichungen war – neben der Forderung der Invarianz gegen beliebige Koordinatentransformationen – die Annahme, daß sich im infinitesimal Kleinen zu jedem Gravitationsfeld ein Bezugssystem angeben läßt, in dem keine Gravitationskräfte auftreten (genau so, wie in einem geeigneten Bezugssystem die Trägheitswirkungen wegfallen). Das bedeutet die *Gleichsetzung der metrischen Feldgrößen* g_{ik} *mit den Gravitationspotentialen.* Ein Fallenlassen dieses EINSTEINschen Äquivalenzprinzips – etwa durch Zurückgehen auf die mildere Forderung, daß homogene Gravitationsfelder wegtransformiert werden können – ließe noch weitere Möglichkeiten von Theorien der beiden Felder – des metrischen und des Gravitationsfeldes – zu.

Die mathematische Aufgabe der Aufstellung der EINSTEINschen Gleichungen des Gravitationsfeldes ist durch unsere Betrachtungen nicht erleichtert worden. Dazu braucht man nach wie vor die Untersuchung der

Transformation krummliniger Koordinatensysteme, der kovarianten Differentation (mittels der CHRISTOFFELschen Symbole) und die Kenntnis des RIEMANN-CHRISTOFFELschen Krummungstensors Nur in den Fallen, die NEWTONsche Theorie bedeuten, laßt sich ohne dieses schwierig zu handhabende mathematische Werkzeug eine Naherung angeben

Die von EINSTEIN *gegebene lineare Naherung*, die die Abweichungen der g_{ik} von ± 1 durch verzogerte Potentiale ahnlich wie in der Elektrodynamik ausdruckt, *entspricht nicht dem linearen Anteil der Gleichungen* (12) Vielmehr sind die Verknupfungen der Feldgroßen mit den felderzeugenden Massen etwas anderer Art

Die EINSTEINsche Naherung[1] fur langsam bewegte, spannungsfreie Materie kann in der Form geschrieben werden

$$g_{ik} = \begin{Bmatrix} 1+2V & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & -1-2V & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & -1-2V & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & -1-2V \end{Bmatrix}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\frac{4}{c} V + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0 \quad \mathfrak{A} = 0$$

($\mathfrak{A}$ faßt $A^1 = -A_1$, $A^2 = -A_2$, $A^3 = -A_3$ zusammen) Als Beschleunigung tritt

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{F} + \frac{\mathfrak{r}}{c} f + \frac{\mathfrak{r}}{c} \times \mathfrak{G}$$

auf, wo

$$\mathfrak{F} = -c^2 \,\mathfrak{grad}\, V$$

$$\mathfrak{G} = c^2 \,\mathfrak{rot}\, \mathfrak{A}$$

$$f = 2cV$$

ist Die Feldgleichungen

$$-V + c^2 \Delta V = 4\pi\gamma\mu$$

$$c^2 \Delta \mathfrak{A} = 16\pi\gamma\mu \frac{\mathfrak{v}}{c}$$

---

[1] Vgl etwa v LAUE, M Die Relativitatstheorie, 2 Bd, § 20 (S 193 der 2 Aufl 1923) Mit dieser Naherung hat H THIRRING die Tragheitskrafte im rotierenden Bezugssystem berechnet (Phys ZS **19**, 33 (1918), **22**, 29 (1921)) und auf eine Analogie zum elektromagnetischen Feld hingewiesen (ebenda **19**, 204 (1918))

sind von (12) verschieden Im Falle, daß V vernachlassigt werden kann, lauten sie

$$-\frac{1}{c}\mathfrak{F} + \mathfrak{rot}\,\mathfrak{G} = -16\pi\gamma\mu\frac{\mathfrak{v}}{c}$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{F} = -4\pi\gamma\mu$$

Mit einer anderen Schreibweise

$$g_{ik} = \begin{Bmatrix} 1+2V & 4A_1 & 4A_2 & 4A_3 \\ 4A_1 & -1-2V & 0 & 0 \\ 4A_2 & 0 & -1-2V & 0 \\ 4A_3 & 0 & 0 & -1-2V \end{Bmatrix}$$

hat man zwar die Nebenbedingung

$$\frac{1}{c}V + \mathrm{div}\,\mathfrak{A} = 0$$

und die Feldgleichungen (12) auf die linearen Glieder beschrankt, aber die Beschleunigung ist jetzt

$$\mathfrak{r} = F + \frac{\mathfrak{r}}{c}f + \frac{\mathfrak{r}}{c} \times 4\mathfrak{G}$$

Auch der Vergleich strenger Losungen der EINSTEINschen Gleichungen mit unserer Modelltheorie ist lehrreich

Nach dem SCHWARZSCHILDschen Ansatz[1]

$$ds^2 = f^2c^2dt^2 - h^2dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

fur das Gravitationsfeld außerhalb einer kugelsymmetrischen Masseverteilung ist die mit Eigenzeit und Maßstab gemessene radiale Beschleunigung eines Korpers geringer Geschwindigkeit

$$F = \frac{d}{f\,dt}\left(\frac{h\,dr}{f\,dt}\right) = -\frac{c^2f'}{hf}$$

Von den Feldgleichungen

$$(hf)' = 0$$

$$h\left(f'' + \frac{2}{r}f'\right) - h'f' = 0$$

konnen wir die zweite durch

$$\frac{1}{hr^2}(r^2F)' - \frac{F^2}{c} = 0 \tag{16}$$

[1] Vgl etwa v LAUE, M a a O § 22 (S 209 der 2 Aufl) – WEYL, H Raum, Zeit, Materie § 31 (S 229 der 4 Aufl 1921)

ersetzen und durch

$$F = -\frac{c\,a}{2\sqrt{r^3(r-a)}} = -\frac{\gamma m}{2\sqrt{r^3(r-2\gamma m/c^2)}}$$

an Stelle von (14) losen (a, m sind Integrationskonstante). Das erste Glied in (16) ist die naturgemaße Definition der Divergenz eines in der r-Richtung liegenden Vektors $\mathfrak{F} = F\mathfrak{r}/r$, namlich Zunahme $d(4\pi r^2 F)$ des Feldflusses durch eine Kugel $r = \text{const}$ dividiert durch Zunahme $4\pi r^2 h\,dr$ des Volumens dieser Kugel (mit Maßstaben gemessen). Mit dieser Definition der Divergenz lautet die Gleichung (16)

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} - \frac{1}{c^2}\mathfrak{F}^2 = 0.$$

Die in der SCHWARZSCHILD*schen Losung auftretende Feldgleichung weicht also von der unserer Modelltheorie* (12) *in einem Zahlenfaktor* (1 statt ½) *ab.*